УДК 519.83

ДЕЯКІ ПИТАННЯ ГЕОМЕТРІЇ ПРЯМОКУТНОГО БІЛЬЯРДУ

Петручек В.В.

У 1936 році Ауербахом та Мазуром була поставлена задача[1]:

Припустимо, що більярдна куля викочується під кутом 45^o з вершини прямокутного стола з раціональним співвідношенням сторін. Чи потрапить вона після скінченної кількості відбивань від сторін в один з решти кутів?

Пропонується такий її розв'язок.

Нехай дано прямокутний більярдний стіл ABCD, куля викочується під кутом 45^o з вершини A; рухається куля без тертя, відбивається від сторін (бортів) стола за законом "кут падіння дорівнює куту відбивання". Якщо куля потрапила в який-небудь кут, то її рух припиняється.

Нехай для визначеності AB<AD, AB=b, AD=a. За умовою $\frac{AD}{AB}=\frac{a}{b}=\frac{p}{q}$, де p,q є N та НСД (p,q) = 1.

Розташуємо центр прямокутної системи координат у вершині A, спрямуємо вісь Ox уздовж прямої AD, вісь Oy уздовж прямої AB. Відобразимо наш прямокутник ABCD відносно прямої CD - отримаємо прямокутник DCB_1A_1. Відобразимо його відносно прямої B_1A_1 - отримаємо прямокутник $A_1B_1C_1D_1$. Повторимо цю операцію нескінченну кількість разів - отримаємо нескінченну послідовність прямокутників ABCD, DCB_1A_1, $A_1B_1C_1D_1$, ..., $A_kB_kC_kD_k$, $D_kC_kB_{k+1}A_{k+1}$, ... (рис.1)

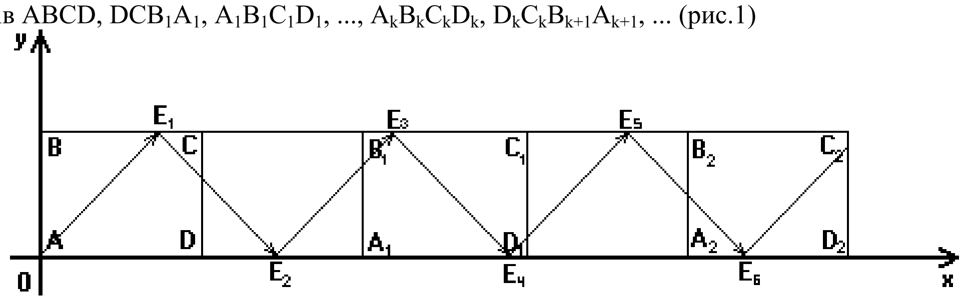

Рис. 1

Не будемо відбивати кулю від борта CD, а дозволимо їй перетнути CD. Аналогічно дозволимо їй перетнути решту сторін: A_1B_1, C_1D_1, A_2B_2, ... На кожному з прямокутників куля проходить від лівої сторони до правої, ударяючись при цьому в верхній та нижній борти (не обов'язково в обидва, але принаймні в один з них). Таким чином, ми отримали таке зображення траєкторії кулі, на якому вона рухається лише зліва направо (Рис.1). Можна сказати, що ми "випрямили" траєкторію кулі. Для того, щоб отримати початкову траєкторію, необхідно частини траєкторії з прямокутників $A_kB_kC_kD_k$ змістити за допомогою паралельного переносу на прямокутник ABCD. З частинами траєкторії, що розташовані на прямокутниках $D_kC_kB_{k+1}A_{k+1}$, вчинимо таке: перенесемо їх на прямокутник DCB_1A_1 (за допомогою паралельного переносу), а потім відобразимо симетрично відносно прямої CD. Згідно з описаними правилами відбивання кулі, траєкторія, яка зображена на прямокутнику ABCD, є траєкторією кулі, яку випущено з вершини A столу ABCD (Рис.2). Зауважимо, що прямі A_kB_k (їхні рівняння $x = 2ka$, $k \in N$) є образи борта AB (тобто лівого борта), а прямі C_kD_k (їхні рівняння $x = (2k+1)a$, $k \in N$) є образи правого борта CD.

Зрозуміло, що для того, щоб куля потрапила в деякий кут X ($X \in \{A,B,C,D\}$), необхідно та достатньо, щоб її "випрямлена" траєкторія пройшла через точку X_m ($X_m \in \{A_m,B_m,C_m,D_m\}$).

Припустимо, що куля повернулася до кута A, тобто її “випрямлена” траєкторія проходить через точку A_k. Розглянемо шлях кулі з A в A_k (Рис.1). Нехай E_1, E_2, E_3, ..., E_{2n-1}, A_k - точки ударення кулі в верхній та нижній борти. Тоді

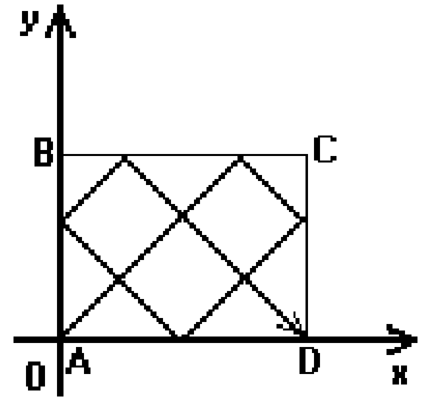

Рис. 2

$$\overline{AA_k} = \overline{AE_1} + \overline{E_1E_2} + ... + \overline{E_{2n-1}A_k} \qquad (*)$$

Довжина проекції кожного з векторів, що стоять у правій частині рівняння (*), на вісь Ox дорівнює b, їхня загальна кількість 2n. Тому рівняння (*) можна подати у вигляді проекції на вісь Ox:

$$2ak = 2bn \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{n}{k} \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{n}{k}.$$

Оскільки НСД(p,q) = 1, а після попадання в кут куля припиняє рух, то n=p, k=q.

Доведемо, що перш ніж потрапити в A_k, куля потрапить в один з кутів B_k, C_k, D_k. Повторивши міркування, аналогічні попереднім, отримаємо умови попадання в кожний кут:

B_k (лівий верхній): $2ka = (2n+1)b$,

C_k (правий верхній): $(2k+1)a = (2n+1)b$,

D_k (правий нижній): $(2k+1)a = 2nb$,

де k, n є N.

Оскільки p,q є N та НСД(p,q) = 1, то можливі три випадки.

1) p та q - непарні.

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q} = \frac{2n+1}{2k+1} \Rightarrow k = (q-1)/2, \quad n = (p-1)/2$$

Виходить, що в цьому випадку куля потрапить у вершину C, а оскільки після попадання в кут куля припиняє рух, то потрапити в A вона не зможе, тому що для цього за доведеним необхідно, щоб n=p та k=q.

2) p - непарне, q - парне

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q} = \frac{2n+1}{2k} \Rightarrow k = q/2, \quad n = (p-1)/2$$

Виходить, що в цьому випадку куля потрапить у вершину B, а оскільки після попадання в кут куля припиняє рух, то потрапити в A вона не зможе, тому що для цього за доведеним необхідно, щоб n=p та k=q.

3) p - парне, q - непарне

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q} = \frac{2n}{2k+1} \Rightarrow k = (q-1)/2, \quad n = p/2$$

Виходить, що в цьому випадку куля потрапить у вершину D, а оскільки після попадання в кут куля припиняє рух, то потрапити в A вона не зможе, тому що для цього за доведеним необхідно, щоб n=p та k=q. Таким чином, при будь-якому співвідношенні сторін p/q куля потрапить в один з кутів B, C, D. Отже, ми отримали позитивну відповідь на питання, що поставили на початку статті.

Цікаво, з якої кількості прямолінійних відрізків складається траєкторія кулі (кінці відрізків лежать на сторонах прямокутника ABCD).

Розглянемо, наприклад, випадок, коли куля потрапляє в кут D (p - парне, q - непарне). "Випрямлена" траєкторія складається з 2n відрізків; ця траєкторія перетинає бічні сторони 2k разів. Тому кількість прямолінійних відрізків S = 2n+2k. Але за доведеним у випадку, коли куля потрапляє в кут D, маємо k = (q-1)/2, n = p/2. Тому

$$S = p + q - 1. \qquad (**)$$

Аналогічно переконуємось у вірності рівняння (**) для випадків, коли куля потрапляє у вершини B та C. Отже, ми показали, що куля потрапить в один з кутів B, C, або D, та знайшли кількість відрізків, з яких складається її траєкторія.

Цікаво було б дізнатися, як поводитиме себе куля на столі з ірраціональним співвідношенням сторін. Нехай a/b є R/Q.

Припустимо, що куля потрапить в один з кутів (A,B,C або D). Тоді за міркуваннями, що були проведені вище, знайдуться такі натуральні числа s та m, що sb=ma, звідки a/b=s/m. Оскільки a/b є R/Q, а s/m є Q, то остання рівність неможлива.

Звідси виходить, що куля буде нескінченно довго рухатися по столу та ніколи не потрапить в жодний кут.

Припустимо, що куля рухається циклічно, тобто починаючи з деякого моменту вона починає рухатися по вже пройденому шляху. Розглянемо "випрямлену" траєкторію. Нехай 2ka - абсциса одного з ударів кулі в лівий борт всередині циклу, (2n+1)b - абсциса наступного після цього удару у верхній борт. Нехай 2sa та (2m+1)b - абсциси відповідних ударів у наступному етапі циклу (Рис.3). Зрозуміло, що справедлива така рівність:

$$b(2n+1) - 2ak = b(2m+1) - 2as,$$

$$2a(s-k) = b(2m+1-2n-1),$$

$$a(s-k) = b(m-n),$$

$$\frac{a}{b} = \frac{m-n}{s-k},$$

Зрозуміло, що остання рівність неможлива, тому що a/b є R/Q, а (m-n)/(s-k) є Q.

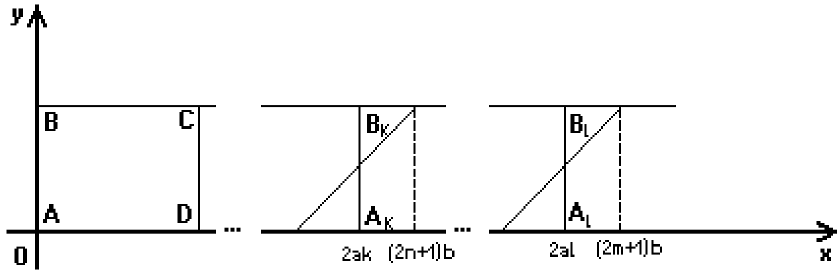

Рис. 3

Отже, рух кулі не є періодичний. Це можна довести іншим чином. Припустимо, що куля рухається періодично. Зупинимо її після відбивання від однієї зі стін та відправимо в зворотному напрямку. Згідно з правилами відбивання, що були оговорені, куля, яку пустили в зворотному напрямку, пройде той самий шлях (з протилежним напрямком обходу). Куля увійде в зворотний цикл та з нього не вийде, що неможливо, оскільки зворотний шлях закінчується в куті A. Протиріччя, яке отримали, доводить те, що куля рухається неперіодично.

Отже, у випадку ірраціонального співвідношення сторін столу куля не потрапить в жодну з його вершин та не зациклиться. З цього виходить, що її траєкторія всюди щільно заповнює увесь прямокутник, тобто перетинає кожне (яке завгодно мале) коло, що лежить всередині нього.

Розглянемо прямокутний більярд розміром p x 2q, де p та q - непарні числа, з вершини якого відправлено кулю під кутом 45^o до його бортів. Чи побуває вона в середині деякої сторони?

З'ясуємо, чи може куля потрапити в середину кожної сторони. Для визначеності вважаємо, що p>2q. Для розв'язку цієї задачі розглянемо "випрямлену" траєкторію кулі. Маємо $\frac{a}{b} = \frac{p}{2q}$, де p та q - непарні числа.

1) куля потрапила в середину нижньої сторони. Це значить, що знайдуться такі натуральні числа k та n, що (k+1/2)a = 2nb, звідки

$$\frac{a}{b} = \frac{2n}{k+1/2} = \frac{4n}{2k+1} \neq \frac{p}{2q}$$

при непарних p і q. Отже, куля не потрапить у середину нижнього борта.

2) куля потрапила в середину верхньої сторони. Це значить, що знайдуться такі натуральні числа k та n, що (k+1/2)a = (2n+1)b, звідки

$$\frac{a}{b} = \frac{2n+1}{k+1/2} = \frac{4n+2}{2k+1} \neq \frac{p}{2q}$$

при непарних p і q. Отже, куля не потрапить у середину верхнього борта.

3) куля потрапила в середину правої сторони. Це значить, що знайдуться такі натуральні числа k та n, що (2k+1)a = (n+1/2)b, звідки

$$\frac{a}{b} = \frac{n+1/2}{2k+1} = \frac{2n+1}{4k+2} = \frac{p}{2q}$$

при q = 2k+1. Отже, куля може потрапити в середину правого борта.

4) куля потрапила в середину лівої сторони. Це значить, що знайдуться такі натуральні числа k та n, що 2ka = (n+1/2)b, звідки

$$\frac{a}{b} = \frac{n+1/2}{2k} = \frac{2n+1}{4k} \neq \frac{p}{2q}$$

при непарних p і q. Отже, куля не може потрапити у середину лівого борта.

Таким чином, куля може потрапити лише в середину правого борта. Аналогічно розглядаємо випадок p<2q та з'ясовуємо, що куля може потрапити лише в середину верхнього борта.

Ускладнимо початкову задачу, викотивши кулю з вершини A прямокутного столу з раціональним співвідношенням сторін під кутом 30^o (60^o) до однієї з його сторін. З'ясуємо, яким чином поводитиме себе куля в цьому випадку.

Зрозуміло, що рух кулі не буде циклічним (бо якщо ми зупинимо її та пустимо в протилежному напрямкові, вона має повернутися в вершину A). Доведемо, що куля не зможе потрапити в будь-яку вершину столу (у тому числі й початкову вершину A).

Розглянемо "випрямлену" траєкторію кулі. Для того, щоб куля потрапила в деяку вершину, необхідно та достатньо, щоб знайшлись такі натуральні числа k та n, що ak = nb ctg30^o, звідки маємо $\frac{a}{b} = \frac{n\sqrt{3}}{k}$. Ліва частина цієї рівності - раціональне число за умовою, права - число ірраціональне, тому ця рівність не може виконуватись. Отже, куля не потрапить у жодну вершину столу та не зациклиться, тому її траєкторія всюди щільно заповнює увесь прямокутник. Аналогічно вона поводитиме себе, якщо її відправити під кутом 60^o, з тією лише різницею, що отримаємо неможливу рівність $\frac{a}{b} = \frac{n}{k\sqrt{3}}$.

Повернемось до столу з ірраціональним співвідношенням сторін. Ми вже з'ясували, що рух кулі, яку відправлено під кутом 45^o до сторін столу, не є періодичним. Цікаво було б дізнатися, чи є що-небудь періодичне в її русі. Розглянемо таку задачу.

Нехай кулю відправлено під кутом 45^o до сторін столу з ірраціональним співвідношенням сторін. Занумеруємо числами 1,2,3,4 сторони більярдного столу. Напишемо підряд номери всіх сторін, в які ударялася куля: n_1, n_2, n_3, ... Чи може отримана послідовність бути періодичною?

Доведемо, що послідовність n_1, n_2, n_3, ... не є періодичною, від протилежного.

Нехай період послідовності n_1, n_2, n_3, ... дорівнює T, причому T є парне число (в іншому випадку розглянемо подвійний період). Випрямимо траєкторію Υ кулі, зробивши послідовні відображення прямокутника відносно сторін n_1, n_2, n_3, ... Отримаємо коридор з однакових прямокутників M_1, M_2, M_3, ..., який містить пряму *l* - випрямлену траєкторію Υ.

Розглянемо в цьому коридорі прямокутники M_1 та M_{T+1}. Прямокутник M_{T+1} може бути отриманий з M_1 або паралельним переносом на деякий вектор **a**, або паралельним переносом та поворотом. У другому випадкові M_{T+1} отримується з M_1 одним поворотом з центром у точці O на деякий кут α. Тоді в послідовності прямокутників M_1, M_{T+1}, M_{2T+1}, ... кожен з них отримується з попереднього або паралельним переносом на один і той самий вектор **a**, або поворотом на один і той самий кут α з центром

О. У другому випадкові весь коридор був би розташований в обмеженій частині площини та не міг би містити пряму *l*. Отже, можливий лише перший випадок: прямокутники в зазначеній послідовності отримуються послідовно один з одного паралельним переносом на вектор **a**. Тоді всі ланки траєкторії ♈ з номерами 1, T+1, 2T+1, ... у вихідному прямокутникові M_1 паралельні одна одній. Якщо вони починаються в різних точках A_1, A_2, A_3, A_4, ... однієї сторони прямокутника M_1, то легко побачити, що $A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=...$. Це суперечить тому, що всі ці точки лежать на одній стороні прямокутника, оскільки сума $A_1A_2+A_2A_3+A_3A_4+$ ... є нескінченною. Таким чином, усі точки A_1, A_2, A_3, A_4, ... співпадають, а тому співпадають й ланки траєкторії ♈ з номерами 1, T+1, 2T+1, 3T+1, ..., тобто ♈ - періодична траєкторія, що неможливо, оскільки рух кулі на столі з ірраціональним співвідношенням сторін не є періодичний за доведеним.

Розглянемо задачу, яка на перший погляд немає нічого спільного з більярдами:

Дано дві посудини об'ємом 7 і 11 літрів та велика бочка, яка наповнена водою. Як за допомогою двох посудин відміряти рівно 2 літри води? Заборонено робити помітки на посудинах, нахиляти їх, щоб відмірювати частки літра, тощо.

Головоломки на переливання дуже легко розв'язувати за допомогою моделі більярду, викреслюючи більярдну траєкторію кулі, що відбивається від бортів ромбічного столу. Границі таких столів зручніше малювати на папері, на який нанесено сітку з однакових правильних трикутників. У задачі, що розглядається, сторони столу мають довжини 7 та 11 одиниць (Рис. 4). По горизонталі відкладена кількість води в 11-літровій посудині в будь-який момент часу, а по вертикалі - та ж сама величина для 7-літрової посудини.

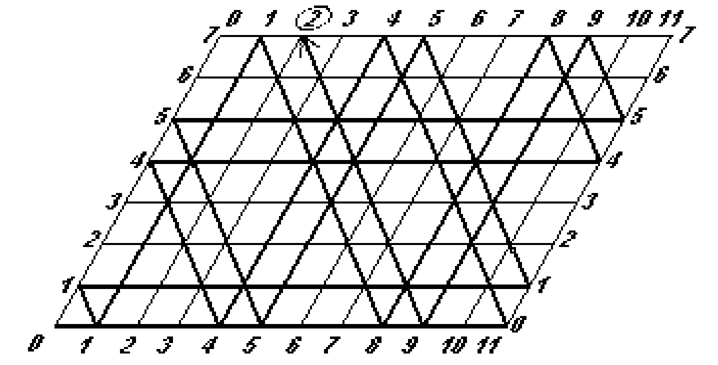

Рис. 4

Уявіть собі, що куля знаходиться в лівій нижній вершині в точці 0. Вона рухатиметься уздовж нижньої основи ромбу доки не досягне правої бічної сторони в точці 11. Це означає, що 11-літрова посудина наповнена повністю, а 7-літрова порожня. Пружно відбившись від правого борта, куля покотиться вгору та вліво та вдариться у верхній борт у точці з координатами (4,7).

Відслідковуючи подальший шлях кулі та нотуючи всі етапи її руху до тих пір, поки вона не потрапить в точку 2 верхнього борта, ми дізнаємось, в якій послідовності необхідно виконувати переливання, щоб відміряти 2 літри води. Усі 18 переливань зображені в таблиці. Похилі стрілки говорять про те, що вода переливається з однієї посудини в іншу, а вертикальні позначають, що або вода цілком переливається з меншої посудини назад в бочку, або більшу посудину необхідно наповнити водою цілком.

Цей розв'язок не є найкоротшим. Існує другий спосіб, коли воду спочатку наливають в 7-літрову посудину. На діаграмі (Рис.4) це відповідає тому, що куля з точки 0 котиться вгору вздовж лівого борта доки не вдариться у верхній борт. Намалювавши траєкторію до кінця, можна переконатися, що вона складається з 14 прямолінійних відрізків, що відповідає 14 переливанням.

Таблиця1

↓				↓						↓				↓			
11	4	4	0	11	8	8	1	1	0	11	5	5	0	11	9	9	**2**
↘		↘		↘		↘		↘		↘		↘		↘		↘	
0	7	0	4	4	7	0	7	0	1	1	7	0	5	5	7	0	7
	↓				↓		↓				↓				↓		↓

Розглянемо стару головоломку з трьома посудинами, що бере початок ще від Ніколи Фонтана (народ. в 1500р. в Італії). 8-літрова посудина цілком заповнена водою. За допомогою двох порожніх посудин об'ємом 3 і 5 літрів воду треба розлити нарівно у дві великі посудини. Діаграма для цієї задачі - ромбічний стіл розміром 3x5 - зображена на Рис.5. Головна діагональ ромбу, яка розділена на 8 рівних частин, відноситься до 8-літрової посудини.

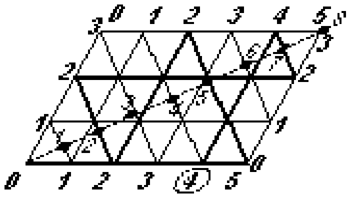

Рис. 5

Як і в попередній задачі, більярдна куля починає свій рух з точки 0. За допомогою її траєкторії отримаємо розв'язок з мінімальною кількістю переливань, яка дорівнює 7.

Докладніше про задачі на переливання можна дізнатися з [2].

ЛІТЕРАТУРА

1. The Scotish Book (Ed. R.D.Mauldin). - Boston-Basel-Stuttgart, Birkhauser, 1981. - 268 p.
2. Гальперин Г.А., Земляков А.Н. Математические бильярды. - М.: Наука, 1990. - 288 с.